

۱۶.

$$-100 < x^2 - 1 < 100 \implies -99 < x^2 < 101$$

$$\implies x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10$$

پس جواب ۲۱ است و گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۱۷. همواره $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ پس $A = \emptyset$ و در نتیجه همه‌ی گزینه‌ها به جز گزینه‌ی ۳ صحیح است، پس جواب گزینه‌ی ۳ است.

۱۸.

$$A - (A - B) = A \cap (A - B)' = A \cap (A' \cup B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

$$B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B') = (B \cap A') \cup (B \cap B') = B \cap A'$$

بنابر این جواب برابر است با

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۹. A را مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و B را مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۷ در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی مورد نظر، $A \cup B - A \cap B$ است.

$$|A \cup B - A \cap B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

از طرفی داریم

$$|A| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200, \quad |B| = \left[\frac{1000}{7}\right] = 142, \quad |A \cap B| = \left[\frac{1000}{35}\right] = 28$$

پس جواب برابر است با $200 + 142 - 2 \times 28 = 186$ که در گزینه‌ها نیست.

۲۰. مجموعه‌ی اعضای کلاس‌ها را به ترتیب A و B و C می‌نامیم. داریم

$$|A \cap B \cap C| = 25 - |A' \cup B' \cup C'| \geq 25 - |A'| - |B'| - |C'| = 25 - 7 - 5 - 3 = 10$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۲۱. موارد (پ) و (ت) صحیح هستند پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۲۲. داریم

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - n - (3(n-1)^2 - (n-1)) = 9n^2 - 9n + 2$$

پس $a_4 = 110$ و $a_6 = 272$ در نتیجه جواب ۳۸۲ است و گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۲۳. داریم

$$u_1 = a + b + c = -9$$

$$u_3 = 9a + 3b + c = -1$$

$$u_5 = 25a + 5b + c = 15$$

از حل این معادلات به دست می‌آید $a = 1$ و $b = 0$ و $c = -10$. در نتیجه $u_7 = 49 - 10 = 39$ پس جواب صحیح ۳۹ است که در گزینه‌ها نیست.

۲۴. برای n زوج،

$$\begin{aligned} S_n &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + ((n-1)^2 - n^2) \\ &= (1 - 2 \times 2) + (1 - 2 \times 4) + (1 - 2 \times 6) + \dots + (1 - 2 \times n) \\ &= \frac{n}{2} - 4 \times (1 + \dots + \frac{n}{2}) = \frac{n}{2} - n(\frac{n}{2} + 1) = -\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

و برای n فرد،

$$S_n = S_{n-1} + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

پس جواب برابر است با

$$S_{1395} + S_{1396} = \frac{1395 \times 1396}{2} - \frac{1396 \times 1397}{2} = -1396$$

که در گزینه‌ها نیست.

۲۵. فرض کنید ارتفاع‌های مثلث، a ، aq و aq^2 باشند که $q > 1$. اگر مساحت مثلث را S بنامیم، اضلاع مثلث برابرند با $\frac{2S}{a}$ ، $\frac{2S}{aq}$ و $\frac{2S}{aq^2}$. پس بنابر نامساوی مثلث،

$$\frac{2S}{a} < \frac{2S}{aq} + \frac{2S}{aq^2}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}$$

$$\Rightarrow q^2 < q + 1$$

پس q باید بین ریشه‌های سهمی $x^2 - x - 1$ باشد. یعنی

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{q} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۲۶. جواب صحیح بازه‌ی $[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^6} + \frac{2}{3^7}]$ است که در گزینه‌ها نیست.

۲۷. داریم

$$b_n = 3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 3 \times 2^{n-2} = 3 \times (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2}) = 3 \times (2^{n-1} - 1)$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۲۸. کلمه‌ی مساوی در صورت سوال اضافی است.

$$100 = x + y + z, \quad 0 < x < y < z$$

$$y = \sqrt{xz} \Rightarrow y^2 = xz$$

$$z = x + y \Rightarrow y^2 = x(x + y) \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

که چون x و y مثبت هستند، علامت منفی قابل قبول نیست. پس $\frac{x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{z}{y} = \frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{100}{y} = \frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y} = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow y = \frac{100}{\sqrt{5} + 1} = 25(\sqrt{5} - 1)$$

$$\Rightarrow x = \frac{25(\sqrt{5} - 1)^2}{2} = 25(3 - \sqrt{5})$$

پس جواب برابر است با $25(3 - \sqrt{5})$ که در گزینه‌ها نیست.

۲۹. اگر a و b به ترتیب طول و عرض مستطیل اصلی باشند، طول مستطیل‌های کوچک برابر $\frac{b}{4}$ و عرض آنها برابر $\frac{a}{18}$ است. پس باید

$$\frac{\frac{a}{18}}{\frac{b}{4}} = \frac{b}{a} \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 9 \implies \frac{a}{b} = 3$$

پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۳۰.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

پس 2α باید برابر با یکی از زاویه‌های 30° یا 150° باشد، یعنی $\alpha = 15^\circ$ یا $\alpha = 75^\circ$ که در هر دو حالت، $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ نمی‌توانند اضلاع یک مثلث باشند. پس سوال غلط است.

۳۱. جواب ناحیه‌ی $x + y < 0$ است. یعنی زیر خط $x + y = 0$ که گزینه‌ی ۴ است.

۳۲. عرض از مبدأ این خط برابر است با $-L \sin \alpha$ و شیب آن برابر است با $\tan \alpha$ پس معادله‌ی خط عبارت است از

$$y = -L \sin \alpha + \tan \alpha x$$

که در گزینه‌ها نیست.

۳۳. داریم

$$0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس عبارت برابر است با

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x - (1 - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۳۴. بنابر اتحاد زیر

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

اگر قرار دهیم $a = \sqrt[3]{x}$ ، $b = \sqrt[3]{y}$ و $c = \sqrt[3]{z}$ به دست می‌آوریم،

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = 0 \implies 3\sqrt[3]{xyz} = 6$$

که نتیجه می‌دهد $xyz = 8$ پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۳۵. با برابر قرار دادن ضرایب x^2 و xy و y^2 در دو طرف به دست می‌آوریم،

$$a^2 + b^2 = ۶۵$$

$$-2a + 2bc = 20$$

$$1 + c^2 = 5$$

که از حل آن‌ها و با توجه به شرط $b < c < 0$ به دست می‌آید

$$c = -2, \quad b = -7, \quad a = 4$$

پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۳۶. اگر زاویه‌ی $\angle xoy$ را نسبت به نقطه‌ی A قرینه کنیم، زاویه‌ی دیگری به دست می‌آید که با زاویه‌ی $\angle xoy$ یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهد و قطر این متوازی‌الاضلاع، تنها جواب مسأله است. پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۳۷. همه‌ی موارد صحیح‌اند. بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۳۸. مثلث BCD با مثلث ABC متشابه است بنابراین متساوی‌الساقین است پس

$$BD = BC = 2 \sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۳۹. داریم $\angle A = 70^\circ$ پس $\angle B + \angle C = 110^\circ$ پس حداقل یکی از $\angle B$ و $\angle C$ از 50° بیشتر است. اگر $\angle B > 50^\circ$ آن‌گاه $\angle B > \beta$ و در نتیجه در مثلث ABM ، $AM > BM$ و اگر $\angle C > 50^\circ$ آن‌گاه $\angle C > \beta$ و در نتیجه در مثلث ABM ، $AM > CM = BM$ پس در هر دو صورت گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۴۰. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و مراکز سه دایره‌ی محاطی خارجی که در مجموع چهار نقطه هستند جواب مسأله است. پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.